Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений (2023 г.)
Физика. 9 класс

Вариант 1

Задача 1. Тело бросили вертикально вверх с поверхности земли. Через время τ начальная скорость тела уменьшилась в n раз. На какую максимальную высоту H поднимется тело?

Решение. Запишем, как изменяется со временем координата y(t) и проекция скорости $v_y(t)$ тела. Отсчет координаты по вертикали ведем от поверхности земли.

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1.1}$$

$$v_y(t) = v_0 - gt\,. \tag{1.2}$$

По условию задачи:

$$v_y(\tau) = v_0 - g\tau = \frac{v_0}{n}.$$

Отсюда получаем:

$$v_0 = \frac{g\tau n}{n-1}. \tag{1.3}$$

Время подъема $t_{\text{под.}}$ тела на максимальную высоту H найдем, приравняв нулю выражение (1.2).

$$v_y(t_{\text{под.}}) = v_0 - g t_{\text{под.}} = 0. \tag{1.4}$$

Из (1.4) получаем:

$$t_{\text{под.}} = \frac{v_0}{g}. \tag{1.5}$$

Максимальную высоту подъема H тела над поверхностью земли получим с использованием выражения (1.1):

$$H = y(t_{\text{под.}}) = v_0 t_{\text{под.}} - \frac{g(t_{\text{под.}})^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}, \tag{1.6}$$

Подставляя в выражение (1.6) найденную начальную скорость v_0, получаем ответ.

Ответ: $H = \frac{g\tau^2 n^2}{2(n-1)^2}$.

Задача 2. В баллоне находится одноатомный идеальный газ в количестве ν=4 моля при температуре T_0=300 К. При нагревании баллона средняя квадратичная скорость молекул газа увеличилось в n=1,3 раза. Какое количество теплоты Q сообщили газу? Универсальная газовая постоянная R=8,314 Дж/(К моль)

Решение. Поскольку объем газа в баллоне остается постоянным, работа газа над внешними телами не совершается. Вся теплота, переданная газу при нагревании, идет на приращение внутренней энергии газа.

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}\,\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\,\nu R(T_{\text{кон.}} - T_0) = \frac{3}{2}\,\nu R \mathrm{T}_0\left(\frac{\mathrm{T}_{\text{кон.}}}{\mathrm{T}_0} - 1\right). \tag{2.1}$$

Среднеквадратичная скорость молекул одноатомного идеального газа связана с температурой газа соотношением:

$$\frac{m v_{\text{ср.квад.}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT \tag{2.2}$$

Используя (2.2), получим соотношение:

$$\frac{\mathrm{T}_{\text{кон.}}}{\mathrm{T}_0} = \frac{v_{\text{ср.квад.,кон.}}^2}{v_{\text{ср.квад.,0}}^2} = n^2. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получаем ответ.

Ответ: $Q=(3/2)\nu RT(n^2-1)$=10.3 кДж.

Задача 3. Аквариум, имеющий форму сферы радиуса R,частично заполнен водой, плотность которой ρ. Высота уровня жидкости над нижней точкой сосуда равна 3R/2. Жидкость в аквариуме испаряется так, что с единицы площади в единицу времени испаряется масса q. За какое время τ испарится вся вода в аквариуме? Величины ρ и q – постоянные величины.

Решение. Облекаем в математическую формулу последнее условие задачи:

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t}. \qquad (3.1)$$

Масса воды δm, испаряемая с поверхности S за время δt будет равна

$$\delta\mathrm{m} = qS\delta\mathrm{t}. \qquad (3.2)$$

С другой стороны, масса испарившейся воды δm может быть записана по другому:

$$\delta\mathrm{m} = \rho S \delta h. \qquad (3.3)$$

Здесь δh – толщина испарившегося слоя воды δm, имеющего поверхность S.
Приравнивая выражения (3.2) и (3.3) друг другу, получаем:

$$\rho\delta h = q\delta\mathrm{t}. \qquad (3.4)$$

Обратим внимание на следующий факт. Т.к. ρ и q – постоянные величины, время испарения δt каждого слоя воды δh не зависит от того, какую открытую поверхность S занимает в данный момент времени вода.
Перепишем выражение (3.4) в следующем виде

$$\delta\mathrm{t} = \frac{\rho\delta h}{q}. \qquad (3.5)$$

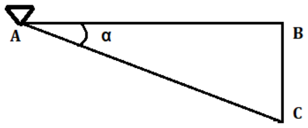
Из (3.5) получаем

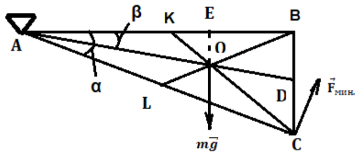
$$\tau = \frac{\rho \mathrm{H}}{q}. \qquad (3.5)$$

Здесь H – сумма всех последовательно испарившихся слоев воды, т.е. высота уровня жидкости над нижней точкой сосуда.
Подставляем H из условия, и получаем ответ.
Ответ: $\tau = \frac{3R\rho}{2q}$.

Задача 4. (25 баллов). Плоский однородный прямоугольный треугольник ABC массы m подвешен за вершину A к неподвижной опоре, и удерживается так, что его катет AB параллелен поверхности земли. Угол при вершине A равен α. Угол при вершине B равен π/2. Какую минимальную силу $F_{мин.}$ надо приложить к треугольнику, чтобы он оставался в равновесии.

Решение. Изобразим начальный рисунок (из условия задачи), и рисунок с геометрическими построениями, необходимыми для решения задачи.





AD, CK, BL –медианы треугольника ABC. Точка O – точка их пересечения, в которой находится центр масс треугольника. $m\vec{g}$- сила тяжести треугольника, приложенная в точке O, и направленная вертикально вниз. OE – перпендикулярна стороне AB, т.к. точка E получена продолжением направления силы $m\vec{g}$ в сторону, противоположную ее направлению до пересечения со стороной AB. Таким образом, отрезок AE – это плечо силы $m\vec{g}$ относительно точки A. Величина момента силы $m\vec{g}$ относительно точки A равна

$$N_{A.,m\vec{g}} = mg\,AE. \qquad (4.1)$$

Этот момент сил стремится вращать треугольник ABC по часовой стрелке относительно точки A.
Момент силы $\vec{F}$, которую надо приложить к треугольнику ABC (чтобы он оставался в равновесии) должен стремиться вращать треугольник ABC против часовой стрелки относительно точки A. Чтобы сила $\vec{F}$ имела минимально возможную величину $F_{мин.}$, надо, чтобы вектор силы $\vec{F}$лежал в плоскости треугольника ABC, чтобы плечо этой силы было бы максимально возможным (т.е. сила $\vec{F}$ должна быть приложена в точке, принадлежащей треугольнику ABC, эта точка должна быть максимально удаленной от точки A). Такой точкой, как видно из рисунка, является точка C. Чтобы прямая AC была плечом силы $\vec{F}$ необходимо, чтобы направление силы $\vec{F}$ было перпендикулярным гипотенузе AC.
Напишем условие равновесия треугольника ABC как равенство моментов сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ относительно точки A:

$$N_{A.,m\vec{g}} = mg\,AE = F_{\text{мин.}}AC = N_{A.,\vec{F}}. \tag{4.2}$$

Из него поучаем

$$F_{\text{мин.}} = mg\,\frac{\text{AE}}{\text{AC}}. \tag{4.3}$$

Выразим AE через AC.
Рассмотрим треугольники AOE и ABD. Обозначим угол BAD как угол β.
Из рисунка видно, что

$$\cos\beta = \frac{AE}{OA} = \frac{AB}{AD}\ . \tag{4.4}$$

Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану на отрезки, длины которых относятся как 2:1. Больший отрезок медианы выходит из вершины соответствующего угла. В нашем случае: OA = (2/3)A D, OD = (1/3)AD.
Подставим OA в (4.4):

$$\cos\beta = \frac{AE}{(2/3)\text{A D}} = \frac{AB}{AD}\ . \tag{4.4a}$$

Из (4.4a) получаем, что

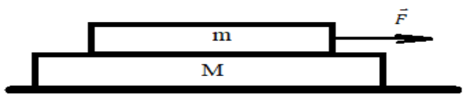
$$\text{AE} = (2/3)\ \text{AB}. \tag{4.5}$$

Легко видеть, что

$$\text{AB} = \text{AC}\cos\alpha \tag{4.6}$$

Подставляя выражения (4.5) и (4.6) в (4.3), получаем ответ.
<u>Ответ:</u> $F_{\text{мин.}} = \frac{2}{3}\,mg\cos\alpha$.

Задача 5. (30 баллов). На горизонтальной поверхности стола покоится доска массы M. На горизонтальной верхней поверхности этой доски покоится другая доска массы m. Коэффициент трения скольжения между досками равен μ_1. Коэффициент трения скольжения между нижней доской и столом равен μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$). К верхней доске приложили горизонтальную силу F (см. рис). Найти ускорения $a_н$ и $a_в$ нижней и верхней досок, силу трения $F_{тр.1}$, возникающую между досками, силу трения $F_{тр.2}$, возникающую между нижней доской и столом.



<u>Решение.</u>
Проанализируем все возможные случаи.

1. Приложенная к верхней доске сила равна нулю (F=0). Тела покоятся. Тогда:

$$a_{\text{н}} = a_{\text{в}} = 0. \tag{5.1}$$

Силы трения (силы трения покоя) тоже равны нулю

$$F_{\text{тр.,1}} \equiv F_{\text{тр.пок.,1}} = 0. \tag{5.2}$$

$$F_{\text{тр.,2}} \equiv F_{\text{тр.пок.,2}} = 0. \tag{5.3}$$

2. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0), но тела покоятся. Тогда:
$$a_н = a_в = 0. \tag{5.4}$$
Силы трения (силы трения покоя) не равны нулю
$$F_{тр.,1} \equiv F_{тр.пок.,1} = \mathrm{F}. \tag{5.5}$$
$$F_{тр.,2} \equiv F_{тр.пок.,2} = \mathrm{F}. \tag{5.6}$$

3. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0). Нижняя доска покоится. Верхняя доска движется (скользит) по верхней доске. Тогда:
$$a_н = 0. \tag{5.7}$$
$$a_в = \frac{F - \mu_1 mg}{m}. \tag{5.8}$$
Решение (5.8) справедливо, если
$$F \geq \mu_1 mg. \tag{5.9}$$
Силы трения не равны нулю
$$F_{тр.,1} \equiv F_{тр.ск.,1} = \mu_1 mg. \tag{5.10}$$
$$F_{тр.,2} \equiv F_{тр.пок.,2} = F_{тр.ск.,1} = \mu_1 mg. \tag{5.11}$$
При этом не надо забывать, что сила трения скольжения между телами (нижней доской и столом) не может быть больше силы трения скольжения (максимальной силы трения покоя между нижней доской и столом)
$$\mu_1 mg = F_{тр.пок.,2} \leq \mu_2(m + \mathrm{M})g. \tag{5.12}$$
В силу условия задачи ($\mu_2 > \mu_1$), неравенство (5.12) не противоречиво. Это означает, что данный вид движения (нижняя доска покоится, верхняя доска движется (скользит) по верхней доске.) возможен.

4. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0) и тела движутся как единое целое.
В этом случае ускорения тел легко вычисляются. Они равны:
$$a_н = a_в = \frac{F - \mu_2(m+\mathrm{M})g}{M+m}. \tag{5.13}$$
Решение (5.13) справедливо, если
$$F \geq \mu_2(m + \mathrm{M})g. \tag{5.14}$$
Сила трения (скольжения) $F_{тр.,2}$ равна
$$F_{тр.,2} = F_{тр.ск.,2} = \mu_2(m + \mathrm{M})g. \tag{5.15}$$
Поскольку верхняя доска движется с только что найденным ускорением $a_в$ благодаря лишь силе F и силе трения $F_{тр.пок.,1}$ (силе трения покоя, т.к. доски не движутся друг относительно друга), мы можем записать соответствующее уравнение движения для верхней доски
$$ma_в = F - F_{тр.пок.,1} \tag{5.16}$$
Из (5.16) получаем:
$$F_{тр.1} \equiv F_{тр.пок.,1} = F - m\frac{F - \mu_2(m+\mathrm{M})g}{M+m} = \frac{FM + \mu_2(m+\mathrm{M})mg}{M+m}. \tag{5.17}$$
Однако, величина силы трения покоя всегда ограничена сверху величиной силы трения скольжения:
$$F_{тр.пок..1} \leq F_{тр.ск..1} = \mu_1 mg. \tag{5.18}$$
Подставляем в последнее неравенство (5.18) выражения для силы $F_{тр.пок.,1}$,из выражения (5.17) найдем силу F, при которой доски могут двигаться как единое целое:
$$F \leq \frac{m(m+M)g}{M}(\mu_1 - \mu_2) \tag{5.19}$$

Но $(\mu_1 - \mu_2) < 0$ по условию задачи. Это означает, что модуль силы $\vec{F}$ неположителен:
$$F \leq 0. \tag{5.20}$$
Полученное противоречие означает, что в условии нашей задачи обе доски ни при какой приложенной силе F не будут двигаться как единое целое.

5. Приложенная к верхней доске сила не равна нулю (F≠0). Доски движутся друг относительно друга и относительно стола. Напишем уравнения движения для каждой из досок:
$$ma_{в} = F - \ mg\mu_1, \tag{5.21}$$
$$Ma_{н} = mg\mu_1 - (m+M)g\mu_2, \tag{5.22}$$
Обе силы трения – силы трения скольжения:
$$F_{тр.ск..1} = \ mg\mu_1. \tag{5.23}$$
$$F_{тр.ск..2} = (m+\text{M})g\mu_2. \tag{5.24}$$

Запишем решения этих уравнений:

$$a_{в} = \frac{F - mg\mu_1}{m}, F \geq mg\mu_1, \tag{5.25}$$
$$a_{н} = \frac{mg\mu_1 - (m+M)g\mu_2}{M}, \ mg\mu_1 \geq (m+M)g\mu_2 \tag{5.26}$$
Неравенство $F \geq mg\mu_1$ – это требование того, чтобы величина $a_{в}$ была неотрицательна. Это неравенство выполнимо и непротиворечиво.
Неравенство $mg\mu_1 \geq (m+M)g\mu_2$ - это требование того, чтобы величина $a_{н}$ была неотрицательна. Это неравенство невыполнимо в условии задачи $(\mu_1 < \mu_2)$. Это означает, что в условии нашей задачи обе доски ни при какой приложенной силе F не будут двигаться друг относительно друга и относительно стола.

Ответ:

1. $a_{н} = a_{в} = 0$, $F_{тр.,1} \equiv \ F_{тр.пок.,1} = 0$, $F_{тр.,2} \equiv \ F_{тр.пок.,2} = 0$, если F=0.
   Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.
2. $a_{н} = a_{в} = 0$, $F_{тр.,1} \equiv \ F_{тр.пок.,1} = F$, $F_{тр.,2} \equiv \ F_{тр.пок.,2} = F$, если $F < mg\mu_1$
   Доски покоятся друг относительно друга и относительно стола.
3. $a_{н} = 0$, $a_{в} = \frac{F - mg\mu_1}{m}$, $F_{тр.ск.,1} = F_{тр.пок.,2} = mg\mu_1$, если $F \geq mg\mu_1$. Нижняя доска покоится относительно стола, верхняя доска движется относительно стола с указанным ускорением.